MATRIZ INVERSA I

1) Halla X tal que $AX = B$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) a) Calcula para qué valores de k existe la inversa de la matriz: $A = \begin{pmatrix} k & -1 & 2 \\ 2 & k & -1 \\ -1 & k & 2 \end{pmatrix}$

b) Calcula A^{-1} para k = 0

3) Halla una matriz, X, tal que $AX + B = 0$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

4) Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 9 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Resuelve la ecuación matricial $X \cdot B - C = D$

SOLUCIONES

1) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow$ Existe A^{-1}.

Despejamos X : $AX = B \rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \rightarrow X = A^{-1}B$

Y por último, necesitamos hallar la matriz inversa de A:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \left(Adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Y la matriz X:

$$X = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & -6 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -15 & -5 & 5 \\ -5 & 0 & -10 \\ -5 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2) Para que exista la inversa de A, tiene que ser el determinante de A distinto de cero, hallémoslo:

$$|A| = \begin{vmatrix} k & -1 & 2 \\ 2 & k & -1 \\ -1 & k & 2 \end{vmatrix} = 2k^2 + 4k - 1 + 2k + k^2 + 4 = 3k^2 + 6k + 3 \rightarrow 3k^2 + 6k + 3 = 0 \Rightarrow k = -1$$

por tanto, existirá la matriz inversa de A siempre que $k \neq -1$

b) para k = 0 $\rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 3$, hallamos la adjunta transpuesta:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

3) $AX + B = 0$, siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

empezamos despejando X en la ecuación:

$AX + B = 0 \Rightarrow AX = -B \Rightarrow A^{-1}AX = -A^{-1}B \Rightarrow X = -A^{-1}B$

luego, necesitamos la matriz inversa de A (si existe), vemos que $|A| = -2$

por lo tanto, podemos resolver la ecuación, hallando A^{-1}:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow (Adj(A))^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

de donde: $X = +\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

4) $X \cdot B - C = D \rightarrow X \cdot B = D + C$

$(X \cdot B) \cdot B^{-1} = (D + C) \cdot B^{-1} \rightarrow XI = (D + C)B^{-1} \rightarrow X = (D + C)B^{-1}$

necesitamos, por lo tanto la matriz inversa de B, calculamos $|B| = 1$

$$Adj(B) = \begin{pmatrix} 24 & -3 & -10 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 24 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando, tenemos la matriz buscada $\rightarrow X = \begin{pmatrix} 69 & -14 & -6 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -3 & -1 \end{pmatrix}$